Cvičení 3

1. Hmotný bod o hmotnosti m se pod vlivem působící síly $\mathbf{F}$ pohybuje po trajektorii $x(t) = \frac{u}{\delta}\left(1 - e^{-\delta t}\right)$; $y(t) = \left(\frac{w}{\delta} + \frac{g}{\delta^2}\right)\left(1 - e^{-\delta t}\right) - \frac{g}{\delta}t$, kde u, w a δ jsou konstanty, g je tíhové zrychlení. Určete působící sílu $\mathbf{F}$.

[*řešení:* $F_x = -m\delta v_x$; $F_y = -mg - m\delta v_y$]

2. Najděte minimum E_B potenciálu $V(r) = -\frac{k}{r^6} + \frac{c}{r^{12}}$, kde k, c jsou kladné konstanty. Pro jakou hodnotou r_0 zadaný potenciál tohoto minima nabývá?

[*řešení:* $E_B = -\frac{k^2}{4c}$; $r_0 = \sqrt[6]{\frac{2c}{k}}$]

3. Hmotný bod se pohybuje po trajektorii $x(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \alpha)$. Vypočítejte okamžitou rychlost hmotného bodu.

[*řešení:* $v(t) = Ae^{-\delta t}\left\{-\delta\sin(\omega t + \alpha) + \omega\cos(\omega t + \alpha)\right\}$]

4. Spočtěte derivace následujících funkcí:
(a) $f(x) = (\ln x)^x$
(b) $g(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b; \quad a, b, x > 0$
(c) $h(x) = \ln^2\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - 2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + 2x$

[*řešení:* (a) $f'(x) = (\ln x)^x\left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right)$; (b) $g'(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b\left(\ln\frac{a}{b} - \frac{a-b}{x}\right)$; (c) $h'(x) = 2\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$]

5. Spočtěte následující integrály:
(a) $f(x) = \int \sin^2 x \mathrm{d}x$
(b) $g(x) = \int \ln x \mathrm{d}x$
(c) $h(x) = \int \frac{x+1}{(x-2)(2x-7)}\mathrm{d}x$

[*řešení:* (a) $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x\cos x + C$, $C \in \mathbf{R}$; (b) $g(x) = x\ln x - x + C$, $x > 0$, $C \in \mathbf{R}$; (c) $h(x) = \ln\left(K\frac{\sqrt{(2x-7)^3}}{x-2}\right)$, $x > \frac{7}{2}$, $K > 0$]

6. Spočtěte určitý integrál $I = \int_0^\pi \frac{-r^2\sin\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}\mathrm{d}\theta$ pro proměnné $R > r$.

[*řešení:* $I = -\frac{2r^2}{R}$]

7. Odvoďte vzorec pro výpočet objemu válce a koule.

Základní vztahy

rychlost	$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$
zrychlení	$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$
druhý Newtonův zákon	$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = m\mathbf{a}$

funkce	derivace	podmínka
C	0	$C \in \mathbf{R}$
x^n	$n\ x^{n-1}$	$n \neq 0$
e^x	e^x	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$a\ f(x) + b\ g(x)$	$a\ f'(x) + b\ g'(x)$	$a, b \in \mathbf{R}$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	
$f(g(x))$	$f'(x)g'(x)$	

lokální minimum funkce $f(x)$ v bodě x_0	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$
	$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0) > 0$
lokální maximum funkce $f(x)$ v bodě x_0	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$
	$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0) < 0$

neurčitý integrál (primitivní funkce):

$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x + C$, kde C je libovolná konstanta

integrace „per partes“

$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$

substituce v integrálu

$\int f\left(g(x)\right) g'(x)\mathrm{d}x = \int f(y)\mathrm{d}y$, kde $y = g(x)$

určitý integrál:

$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$